Universidad Simón Bolívar
Departamento de Física

Física I
FS-1111

1er Parcial

Sartenejas, 15 de febrero de 2023

Nombre:___________________________. **Carnet**:____________. **Cédula**:____________. **Sección**:____.

<u>**Parte I**</u>: Selección simple (20 puntos). A continuación se presentan 10 preguntas con un valor de 2 puntos cada una. Marque con una **X** la opción que considere correcta, justificando debidamente en cada caso su respuesta. **Si no hay justificación o la misma está errada, se asignará una nota de cero puntos a la pregunta. Cada planteamiento tiene una única respuesta correcta, por lo que marcar más de una opción anula la respuesta.** No hay factor de corrección.

1. Dados los vectores $\vec{V}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{V}_2 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ y $\vec{V}_3 = \hat{k}$, se puede mostrar que:
   ( ) $\vec{V}_1 \,.\, (\vec{V}_2 \,x\, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\,\vec{V}_3$
   ( ) $\vec{V}_1 \,x\, (\vec{V}_2 - \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\,\vec{V}_3$
   (X) $\vec{V}_1 \,x\, (\vec{V}_2 \,x\, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\,\vec{V}_3$
   ( ) $\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 \,.\, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\,\vec{V}_3$
   ( ) Ninguna respuesta correcta

Solución en la Página siguiente

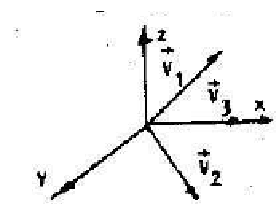
Una habitación tiene unas dimensiones 3,00 m (altura) X 3,70 m X 4,30 m. Una mosca que parte de una esquina vuela alrededor, terminando en la esquina diagonalmente opuesta.

2. ¿Cuál es la magnitud de su desplazamiento?
   (X) 6.42 m
   ( ) 6.70 m
   ( ) 8.0 m
   ( ) 13.0 m
   ( ) Ninguna respuesta correcta

3. Las componentes del vector desplazamiento en dicho sistema en notación vectorial unitaria son:
   ( ) $(4.30\,m)\hat{\imath} - (3.70\,m)\hat{\jmath} - (3.00\,m)\hat{k}$
   ( ) $(4.30\,m)\hat{\imath} + (3.70\,m)\hat{\jmath} + (3.00\,m)\hat{k}$
   ( ) $(3.70\,m)\hat{\imath} - (4.30\,m)\hat{\jmath} - (3.00\,m)\hat{k}$
   (X) $(3.70\,m)\hat{\imath} + (4.30\,m)\hat{\jmath} + (3.00\,m)\hat{k}$
   ( ) Ninguna respuesta correcta

4. Si la mosca camina, ¿cuál es la longitud del camino más corto?
   ( ) 6.42 m
   ( ) 6.70 m
   ( ) 8.0 m
   (X) 7.96 m
   ( ) Ninguna respuesta correcta

Pregunta 1Solución: Los tres vectores se escriben en términos de los vectores unitarios como:



$$\vec{V}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}, \quad \vec{V}_2 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} \quad y\ \vec{V}_3 = \hat{k}$$

$$\vec{V}_2\, x\, \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}$$

Luego

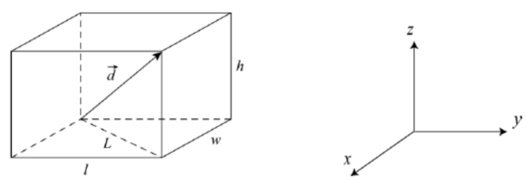
$$\vec{V}_1\, x\, (\vec{V}_2\, x\, \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \widehat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación se tiene:

$$(\vec{V}_1.\vec{V}_3)\,\vec{V}_2 - (\vec{V}_1.\vec{V}_2)\,\vec{V}_3 = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) - 5\hat{k}$$

Se observa que ambos miembros de la igualdad son idénticos, por lo que queda demostrado

Pregunta 2 Solución: El desplazamiento de la mosca se ilustra en la figura siguiente:



Un sistema de coordenadas como el que se muestra (arriba a la derecha) nos permite expresar el desplazamiento como un vector tridimensional.

(a) La magnitud del desplazamiento de una esquina a la esquina diagonalmente opuesta es:

$$d = |\vec{d}\,| = \sqrt{w^2 + l^2 + h^2}$$

Sustituyendo los valores dados, se obtiene:

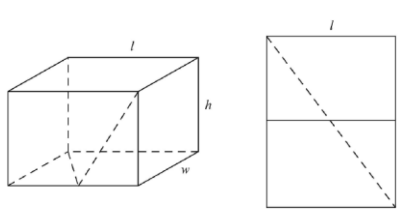
$$d = |\vec{d}\,| = \sqrt{w^2 + l^2 + h^2} = \sqrt{(3.70\text{ m})^2 + (4.30\text{ m})^2 + (3.00\text{ m})^2} = 6.42\text{ m}\,.$$

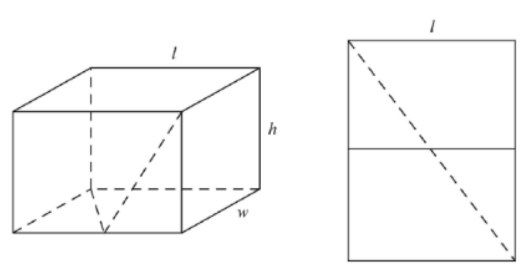
Pregunta 3: Tomamos el eje *x* hacia fuera de la página, el eje *y* a la derecha, y el eje *z* hacia arriba. Entonces la componente *x* del desplazamiento es $w = 3{,}70\ m$, la componente *y* del desplazamiento es $4{,}30\ m$, y la componente *z* es $3{,}00\ m$. Por lo tanto,

$$\vec{d} = (3.70\text{ m})\hat{\text{i}} + (4.30\text{ m})\hat{\text{j}} + (3.00\text{ m})\hat{\text{k}}\,.$$

Pregunta 4: Supongamos que la trayectoria de la mosca es la indicada por las líneas de puntos del diagrama siguiente. Imagina que hay una bisagra donde la pared frontal de la habitación se une con el suelo y coloca la pared como se muestra en el diagrama inferior.

La distancia más corta a pie entre la parte trasera inferior izquierda de la habitación y la esquina delantera superior derecha es la línea recta punteada que se muestra en el diagrama. Su longitud es:





$$L_{\min} = \sqrt{(w + h)^2 + \ell^2} = \sqrt{(3.70\text{ m} + 3.00\text{ m})^2 + (4.30\text{ m})^2} = 7.96\text{ m}\,.$$

5. Demostrar que si $\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}\right)$, entonces:
   - (X) $\vec{V}_1 \, x \, \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \, x \, \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \, x \, \vec{V}_1$.
   - ( ) $\vec{V}_1 \, x \, \vec{V}_2 = \vec{V}_3 \, x \, \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \, x \, \vec{V}_1$.
   - ( ) $\vec{V}_1 \, x \, \vec{V}_3 = \vec{V}_2 \, x \, \vec{V}_3 = \vec{V}_2 \, x \, \vec{V}_1$.
   - ( ) $\vec{V}_1 \, x \, \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \, x \, \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \, x \, \vec{V}_2$.
   - ( ) Ninguna respuesta correcta

Solución Página Siguiente

6. En la circunstancia anterior se cumple que:
   - ( ) $\dfrac{V_2}{\sin(\sphericalangle V_2V_3)} = \dfrac{V_1}{\sin(\sphericalangle V_3V_1)} = \dfrac{V_3}{\sin(\sphericalangle V_1V_2)}$
   - ( ) $\dfrac{V_1}{\sin(\sphericalangle V_2V_3)} = \dfrac{V_3}{\sin(\sphericalangle V_3V_1)} = \dfrac{V_2}{\sin(\sphericalangle V_1V_2)}$
   - ( ) $\dfrac{V_3}{\sin(\sphericalangle V_2V_3)} = \dfrac{V_2}{\sin(\sphericalangle V_3V_1)} = \dfrac{V_1}{\sin(\sphericalangle V_1V_2)}$
   - (X) $\dfrac{V_1}{\sin(\sphericalangle V_2V_3)} = \dfrac{V_2}{\sin(\sphericalangle V_3V_1)} = \dfrac{V_3}{\sin(\sphericalangle V_1V_2)}$
   - ( ) Ninguna respuesta correcta

Solución Página Siguiente

Un aeroplano viaja de A siguiendo la dirección del norte hacia B y luego retorna a A. La distancia entre A y B es L. La velocidad del avión en el aire es $\vec{v}$ y la velocidad del viento es $\vec{v}'$.

7. El tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta en aire quieto, $v' = 0$, es:
   - (X) $t_a = \frac{2L}{v}$
   - ( ) $t_a = \frac{L}{2v}$
   - ( ) $t_a = \frac{2L}{v} + v$.
   - ( ) $t_a = \frac{2L}{v} - v$.
   - ( ) Ninguna respuesta correcta

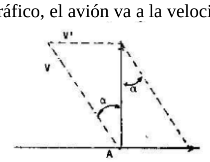
Solución:

(a) En esta circunstancia, la distancia total recorrida por el avión es 2L, por lo que, si la velocidad es constante, entonces

$$\boldsymbol{v = \frac{2L}{t_a} \;\Rightarrow\; t_a = \frac{2L}{v} \;\longrightarrow\; lqqd}$$

8. El tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta cuando el viento corre hacia el este (u oeste) es:
   - ( ) $t_b = \dfrac{t_a}{\sqrt{1+\left(\frac{v'}{v}\right)^2}}$
   - ( ) $t_b = \dfrac{t_a}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{v}\right)}}$
   - (X) $t_b = \dfrac{t_a}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}}$
   - ( ) $t_b = \frac{2L}{v} - v'$.
   - ( ) Ninguna respuesta correcta

En este caso, como se observa en el gráfico, el avión va a la velocidad V, por lo tanto, se debe hallar V.



Aplicando la ley de los senos encontramos:

$$\frac{v'}{\sin\alpha} = \frac{v}{\sin 90°} \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{v'}{v}$$

De la figura se obtiene:

$$v_N = v\cos\alpha = v\sqrt{1-\sin^2\alpha} = v\sqrt{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}$$

Por lo tanto,

$$t_b = \frac{2L}{v_N} = \frac{2L}{v\sqrt{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t_b = \frac{t_a}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}}}$$

Pregunta 5 Solución:

De acuerdo con el enunciado $\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{0}\right)$

$$\vec{V}_1\, x\, \vec{V}_3 = \vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2 = \vec{V}_2\, x\, \vec{V}_1$$

De la primera condición

$$(V_{1x} + V_{2x} + V_{3x})\hat{\imath} = 0$$
$$\left(V_{1y} + V_{2y} + V_{3y}\right)\hat{\jmath} = 0$$
$$(V_{1z} + V_{2z} + V_{3z})\hat{k} = 0$$

De la segunda condición:

$$\vec{V}_1\, x\, \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_1\, x\, \vec{V}_3 = \left(V_{1y}V_{3z} - V_{3y}V_{1z}\right)\hat{\imath} - (V_{1x}V_{3z} - V_{3x}V_{1z})\hat{\jmath} + \left(V_{1y}V_{3z} - V_{3y}V_{1z}\right)\hat{k}$$

Por otro lado:

$$\vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ V_{3x} & V_{3y} & V_{3z} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2 = \left(V_{3y}V_{2z} - V_{3z}V_{2y}\right)\hat{\imath} + (V_{2x}V_{3z} - V_{3x}V_{2z})\hat{\jmath} + \left(V_{2y}V_{3x} - V_{3y}V_{2x}\right)\hat{k}$$

Y,

$$\vec{V}_2\, x\, \vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ V_{2x} & V_{2y} & V_{2z} \\ V_{1x} & V_{1y} & V_{1z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2 = \left(V_{2y}V_{1z} - V_{2z}V_{1y}\right)\hat{\imath} + (V_{1x}V_{2z} - V_{2x}V_{1z})\hat{\jmath} + \left(V_{1y}V_{2x} - V_{2y}V_{1x}\right)\hat{k}$$

De la segunda condición se tiene:

$$\vec{V}_1\, x\, \vec{V}_3 = \vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1\, x\, \vec{V}_3 - \vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2 = \vec{0}$$

Por lo que:

$$\left(V_{1y}V_{3z} - V_{3y}V_{1z}\right) - \left(V_{3y}V_{2z} - V_{3z}V_{2y}\right) = 0$$
$$-(V_{1x}V_{3z} - V_{3x}V_{1z}) - (V_{2x}V_{3z} - V_{3x}V_{2z}) = 0$$
$$\left(V_{1y}V_{3z} - V_{3y}V_{1z}\right) - \left(V_{2y}V_{3x} - V_{3y}V_{2x}\right) = 0$$

Mostremos la primera igualdad

$$\left(V_{1y}V_{3z} - V_{3y}V_{1z}\right) - \left(V_{3y}V_{2z} - V_{3z}V_{2y}\right) = V_{3z}\left(V_{1y} + V_{2y}\right) - V_{3y}(V_{1z} + V_{2z})$$

Usando la primera condición se encuentra

$$-V_{3z}V_{3y} + V_{3z}V_{3y} = 0$$

De la misma forma se muestran los otros dos términos y la otra igualdad, por lo que se demuestra la pregunta.

Pregunta 6: Una vez mostrados las igualdades anteriores, entonces podemos escribir que:

$$\left|\vec{V}_1\, x\, \vec{V}_3\right| = \left|\vec{V}_3\, x\, \vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_2\, x\, \vec{V}_1\right|$$

Por lo que

$$V_1V_3 \sin(\sphericalangle V_3V_1) = V_2V_3 \sin(\sphericalangle V_2V_3) = V_2V_1 \sin(\sphericalangle V_1V_2)$$

De aquí se obtiene que:

$$\frac{V_1}{\sin(\sphericalangle V_2V_3)} = \frac{V_2}{\sin(\sphericalangle V_3V_1)} = \frac{V_3}{\sin(\sphericalangle V_1V_2)}$$

Pregunta 7:

9. El tiempo necesario para un viaje de ida y vuelta cuando el viento corre hacia el norte (o sur) es:

(x) $t_c = \frac{t_a}{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}$

( ) $t_b = \frac{t_a}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}}$

( ) $t_c = \frac{t_a}{1+\left(\frac{v'}{v}\right)^2}$

( ) $t_c = \frac{t_a}{1-\left(\frac{v'}{v}\right)}$

( ) Ninguna respuesta correcta

Si el viento sopla al norte:

De ida AB: $V = v + v'$; de regreso $V' = v - v'$

El tiempo empleado en ida y vuelta es entonces:

$$t_c = \frac{L}{v+v'} + \frac{L}{v-v'} = \frac{L[v - v' + v + v']}{v^2 - v'^2}$$

Así se encuentra:

$$t_c = \frac{2Lv}{v^2 - v'^2} = \frac{\frac{2L}{v}}{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2} \Rightarrow \boldsymbol{t_c = \frac{t_a}{1-\left(\frac{v'}{v}\right)^2}}$$

10. La $Comp_{\vec{B}}\vec{A}$ es un escalar y se puede escribir como:

(X) $Comp_{\vec{B}}\vec{A} = \vec{A}.\hat{e}_B$

( ) $Comp_{\vec{A}}\vec{B} = \vec{A}.\hat{e}_B$

( ) $Comp_{\vec{B}}\vec{A} = \vec{B}.\hat{e}_B$

( ) $Comp_{\vec{B}}\vec{A} = \vec{A}.\hat{e}_A$

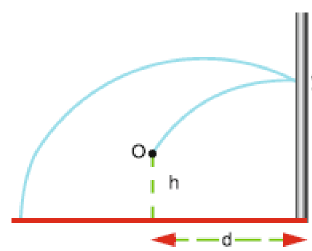
( ) Ninguna respuesta correcta

Solución: Por definición la componente de un vector sobre otro, es el modulo de la proyección, en este caso del vector $\vec{A}$, sobre el vector $\vec{B}$, y esto es $A\cos\theta$, siendo θ el ángulo entre los vectores, por lo que la solución debe ser:

$$\vec{A}.\hat{e}_B$$

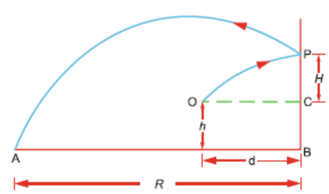
<u>Parte II</u>: Problema de desarrollo (15 puntos). A continuación se presenta un problema que debe desarrollar. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible.

1. Se lanza una pelota desde una altura h sobre el suelo, como se muestra en la figura. La pelota sale del punto situado a una distancia d de la pared, a 45◦ de la horizontal con velocidad $\vec{u}$. La colisión con la pared sólo cambia la dirección de la componente x de la velocidad, de u_x a $-u_x$, manteniendo su modulo, por otro lado, la componente u_y permanece inalterada, tanto en modulo como en dirección y sentido. ¿A qué distancia de la pared golpea la pelota el suelo?



Solución: Tomemos el origen en O, como se muestra en la figura. Dibujemos la línea de referencia OC paralela a AB, el nivel del suelo. Que la pelota golpee la pared a una altura H sobre C. Inicialmente en O,

$$u_x = u\cos\alpha = u\cos 45^\circ = \frac{u}{\sqrt{2}}$$
$$u_y = u\sin\alpha = u\sin 45^\circ = \frac{u}{\sqrt{2}}$$



La pelota golpea a la pared a una altura

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

Usando $y = H$, $x = d$ y $\alpha = 45^o$, se encuentra

$$H = d\left(1 - \frac{gd}{u^2}\right)$$

Si el tiempo que tarda la pelota en rebotar de P a A es t y el alcance $BA = R$

$$y = v_y' t - \frac{1}{2} g t^2$$

Usando

$$t = \frac{R}{u \cos 45°} = \sqrt{2} \frac{R}{u}$$

$$y = -(H + h)$$

$$v_y' = u \sin 45° - g \frac{d}{u \cos 45°} = \frac{u}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \frac{gd}{u}$$

Usando las ecuaciones anteriores se encuentra que:

$$y = \left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \frac{gd}{u} \right) \frac{\sqrt{2} R}{u} - \frac{1}{2} g \frac{2R^2}{u^2}$$

Sustituyendo y reagrupando se encuentra

$$-(H + h) = R - \frac{2gdR}{u^2} - \frac{gR^2}{u^2}$$

Esto nos conduce a una ecuación de cuadrática en R de la forma:

$$\frac{g}{u^2} R^2 - \left(1 - \frac{2gd}{u^2} \right) R - (H + h) = 0$$

Lo cual tiene como solución

$$R = \frac{u^2}{2g} - d \pm \sqrt{\frac{u^4}{4g^2} + \frac{u^2}{g} h}$$

La solución debe ser la positiva para evitar que R tome valores negativos

$$\boldsymbol{R = \frac{u^2}{2g} - d + \sqrt{\frac{u^4}{4g^2} + \frac{u^2}{g} h}}$$